

弹性空腔声振耦合试验相似动力学特性分析

施傲^{1,2}, 路波², 杨党国^{1,2}, 王显圣², 刘俊², 周方奇²

- (1. 中国空气动力研究与发展中心 空气动力学国家重点实验室, 四川 绵阳 621000;
2. 中国空气动力研究与发展中心 高速空气动力研究所, 四川 绵阳 621000)

摘 要: 针对典型弹性空腔声振耦合高速风洞试验问题, 基于风洞试验相似原理, 以典型弹性空腔为实例, 采用量纲分析法建立了完全几何相似模型固有频率和频率响应的相似关系; 结合结构有限元理论, 通过引入完全几何相似模型作为过渡模型, 建立了厚度畸变缩比模型固有频率和频率响应的相似关系; 开展了缩比弹性空腔模型的固有频率及动力学响应的数值仿真。根据缩比模型的计算结果, 利用已建立的相似关系对全尺寸模型的 dynamics 响应进行预测, 结果表明: 预测响应曲线与实际计算结果曲线基本重合, 验证了提出的缩比空腔模型固有频率及频响相似关系的可行性, 为基于动力学相似的缩比弹性空腔风洞试验模型设计和声振耦合试验提供理论指导, 且该相似关系的分析方法可推广应用于复杂外形薄壁结构的动力学相似关系建立中。

关键词: 弹性空腔; 相似理论; 动力学相似; 声振耦合; 风洞试验

中图分类号: V214.4

文献标志码: A

Analysis of similar dynamic characteristics of vibro-acoustic experiment for elastic cavity

SHI Ao^{1,2}, LU Bo², YANG Dangguo^{1,2},
WANG Xiansheng², LIU Jun², ZHOU Fangqi²

- (1. State Key Laboratory of Aerodynamics,
China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang Sichuan 621000, China;
2. High Speed Aerodynamics Institute,
China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang Sichuan 621000, China)

Abstract: In allusion to the vibro-acoustic experiments of cavity in wind tunnel, taking typical elastic cavity as the research object, dimensional analysis was adopted to establish the similitude relations of structural natural frequencies and dynamics for complete geometric similarity model. Combining the structural finite element theory, the similitude relations of structural natural frequencies and dynamics for incomplete geometric similarity model were established by introducing the complete geometric similarity model as intermediate model. Numerical simulations of natural frequencies and dynamics of scale-down elastic cavity model were carried out. According to the numerical results of scale-down model, the dynamic response results of full-scale model were predicted by the proposed similitude relations. Re-

收稿日期: 2017-07-05

基金项目: 国家自然科学基金(11602287, 11402286)

作者简介: 施傲(1993—), 男, 硕士生, 主要从事声振耦合试验及数值仿真方面的研究。

引用格式: 施傲, 路波, 杨党国, 等. 弹性空腔声振耦合试验相似动力学特性分析[J]. 航空动力学报, 2018, 33(11): 2611-2619. SHI Ao, LU Bo, YANG Dangguo, et al. Analysis of similar dynamic characteristics of vibro-acoustic experiment for elastic cavity[J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(11): 2611-2619.

sults showed that the predicted dynamic response curves were in coincidence with the actual numerical results, which verified the feasibility of the proposed similitude relations and also provided a theoretic guidance for structural design and vibro-acoustic experiments of scaled down elastic cavity model with similar dynamics. The analysis method of the established similitude relations can be applied to complex thin-wall structures.

Key words: elastic cavity; similarity theory; dynamic similarity; vibro-acoustic coupling; wind-tunnel experiment

空腔结构是现代航空航天设备中必不可少且普遍存在的一种典型结构形式,在高速来流条件下,空腔内恶劣的噪声环境会诱发结构剧烈振动乃至疲劳破坏,严重威胁飞行安全^[1-2],因而厘清空腔内高强噪声载荷对结构振动特性的影响规律对飞行器的结构设计意义重大。考虑到飞行安全、试验条件、成本及试验周期等多方面因素,开展缩比弹性模型声振耦合特性试验是一种有效的研究途径^[3]。然而飞行器上典型空腔多采用薄壁结构,难以保证缩比模型的厚度与其他方向缩比系数相同,即无法实现在几何上与实际结构完全相似,因此就需要研究不完全几何相似模型即厚度畸变模型的动力学相似关系。对于这个问题,一些学者也做了相应研究,如 Morton^[4] 基于量纲分析理论建立了冲击载荷作用下碳纤维复合材料梁的动力学相似关系;Qian 等^[5] 开展了冲击载荷作用下复合板的相似关系试验研究,并基于系统控制方程建立了结构相似关系;Frostig 等^[6] 分别基于量纲分析理论和控制方程分析了简支梁的动力学相似关系,同时开展了畸变模型的相似关系研究;Rezaeepazhand 等^[7-8] 研究了多层复合板振动响应的完全及部分相似关系,并对相似条件畸变时的情况进行分析,同时开展了物理参数对相似条件的敏感性研究;Friedmann^[9] 通过数值仿真和试验相结合的方式研究直升机旋转叶片的气动弹性特性;陈喆等^[10] 基于相似理论和有限元法提出了非比例缩放模型的动力学相似关系;罗忠等^[11-12] 针对薄板结构畸变模型动力学相似设计问题,提出了一种固有特性相似时的畸变模型尺寸区间确定方法,同时针对带扭型叶片固有特性的相似试验模型设计问题,提出一种试验模型的扭转角相似区间的确定及修正方法;李斌等^[13] 研究了阻尼不相似动力学模型的时域响应修正方法;孙宁^[14] 基于 Love 理论推导出薄壁圆柱壳的振动方程,根据方程分析法建立了固有频率和振动响应的完全相似关系,同时利用数值仿真手段开展了结构参数对固有频率的敏感性分析,并通过引

入过渡模型建立了不完全几何相似模型的固有频率相似关系。

为了开展弹性空腔声振耦合特性试验研究,本文基于相似理论,以典型弹性空腔为实例,利用量纲分析法建立了完全几何相似模型固有频率和频响的相似关系;基于有限元理论,通过引入完全几何相似模型作为过渡模型,建立了不完全几何相似结构固有特性和频响的相似关系;根据随机振动理论,建立了结构振动响应的相似关系,并利用数值仿真进行了验证。

1 固有频率相似关系

1.1 完全几何相似

有限弹性体在给定的边界条件下,有特定的固有频率。弹性体的振动实际上是动能与弹性能之间不断的转化现象,动能源于介质的运动惯性,由介质的密度 ρ 表征,弹性能则源于弹性介质所具有的恢复变形的特性,由弹性模量 E 和泊松比 μ 表征^[15]。如果给定的边界条件是位移固定的条件,不考虑结构阻尼的影响,则与结构固有特性相关的物理量包括 $\rho, E, \mu, l, \omega_n$ 。其中 l 为弹性体特征长度; ω_n 为结构固有频率。

可取 ρ, l, E 作为基本量,则根据量纲分析知识可以推导出两个无量纲数

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{E}{\rho l^2 \omega_n^2} \\ \pi_2 = \mu \end{cases} \quad (1)$$

由式(1)可知,对于完全几何相似的两个模型,若其边界条件相同,不考虑阻尼影响,则在满足 $\lambda_\mu = 1$ 的前提下,缩比模型与真实结构固有频率满足如下关系:

$$\lambda_{\omega_n} = \frac{1}{\lambda_l} \sqrt{\frac{\lambda_E}{\lambda_\rho}} \quad (2)$$

其中 λ 表示缩比模型与真实结构的缩比系数,下标代表对应物理参数。

1.2 不完全几何相似

针对典型弹性空腔声振耦合高速风洞试验问

题,可以保证缩比模型与真实空腔在长、宽及深度方向的缩比系数相同,但考虑到空腔为薄壁结构,难以实现厚度缩比系数与其他方向缩比系数相同,因此需要开展厚度畸变的缩比薄壁空腔固有频率相似关系研究。

首先分析变厚度薄壁空腔的固有频率相似关系,即两个空腔模型材料相同,几何参数满足 $\lambda_h \neq 1, \lambda_L = \lambda_W = \lambda_D = 1$,其中 L, W, D, h 分别表示薄壁空腔的长、宽、深和壁厚。根据结构有限元理论,对空腔进行网格划分后可转成多自由度系统动力学问题进行研究,其运动方程为^[16]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \tag{3}$$

若不考虑阻尼的影响,则系统特征方程为

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = 0 \tag{4}$$

式中特征方程的根 ω_n 为结构固有频率,对应的特征向量 $\boldsymbol{\phi}$ 即为结构模态振型。

对于各向同性均匀薄板构件,结合有限元理论,矩形单元的质量矩阵和刚度矩阵可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{M}^e = \iint_A \rho h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA = \rho h \mathbf{X}^e \\ \mathbf{K}^e = \iint_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} \mathbf{Y}^e \end{cases} \tag{5}$$

式中 $\mathbf{N}$ 为单元形态矩阵, $\mathbf{B}$ 为应变矩阵, $\mathbf{D}$ 为弹性矩阵, A 为单元面积,上标 e 代表该矩阵为单元矩阵。

分析不难发现, $\mathbf{X}^e$ 和 $\mathbf{Y}^e$ 仅与单元形状及材料泊松比有关。对于变厚度薄壁空腔,由于两个模型材料相同,且满足 $\lambda_L = \lambda_W = \lambda_D = 1, \lambda_h \neq 1$,若缩比模型与真实结构均采用矩形单元划分且划分方式完全相同,即网格拓扑关系一致,则结合式(5)可以推出缩比模型和真实结构的单元质量矩阵和刚度矩阵满足如下关系:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_s^e = \lambda_M \mathbf{M}^e = \lambda_h \mathbf{M}^e \\ \mathbf{K}_s^e = \lambda_K \mathbf{K}^e = \lambda_h^3 \mathbf{K}^e \end{cases} \tag{6}$$

其中下标 s 表示缩比模型。

整体质量阵 $\mathbf{M}$ 和刚度阵 $\mathbf{K}$ 是由单元的各矩阵集成得到,可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \sum \mathbf{M}^e \\ \mathbf{K} = \sum \mathbf{K}^e \end{cases} \tag{7}$$

结合式(4)、式(6)和式(7)可推出缩比模型特征方程为

$$(\lambda_K \mathbf{K} - \omega_{ns}^2 \lambda_M \mathbf{M})\boldsymbol{\phi}_s = 0 \tag{8}$$

由于刚度缩比系数 $\lambda_K > 0$,则式(8)可改写为

$$(\mathbf{K} - \omega_{ns}'^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi}_s = 0 \tag{9}$$

其中 $\omega_{ns}' = \omega_{ns} \sqrt{\lambda_M / \lambda_K}$ 。

对比式(4)和式(9)发现两个特征方程的形式相同,因此特征值相等,对应特征向量相同,则有

$$\begin{cases} \lambda_{\omega_n} = \omega_{ns} / \omega_n = \lambda_h \\ \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}_s \end{cases} \tag{10}$$

式(10)说明,对于变厚度薄壁空腔,若材料及边界条件相同,则结构固有频率与厚度成正比。

综合完全几何相似模型和变厚度模型的固有频率相似关系,对于厚度畸变的缩比模型($\lambda_L = \lambda_W = \lambda_D \neq \lambda_h$),为建立其与真实结构的固有频率相似关系,可通过将完全几何相似模型作为过渡模型来简化分析过程(如图 1 所示),各模型的结构参数如表 1 所示。



图 1 弹性空腔动力学相似关系分析流程
Fig. 1 Analysis flow path of dynamic similitude relations for elastic cavity

表 1 模型结构参数

Table 1 Structural parameters of models		
模型	几何参数	材料参数
真实空腔	L, W, D, h	E, ρ, μ
过渡模型	$\lambda_l L, \lambda_l W, \lambda_l D, \lambda_l h$	$\lambda_E E, \lambda_\rho \rho, \mu$
缩比空腔	L_s, W_s, D_s, h_s	E_s, ρ_s, μ

$$\text{其中 } \lambda_l = \frac{L_s}{L} = \frac{W_s}{W} = \frac{D_s}{D}, \lambda_E = \frac{E_s}{E}, \lambda_\rho = \frac{\rho_s}{\rho}.$$

过渡模型与真实空腔满足完全几何相似,则由式(2)可推出结构固有频率相似关系为

$$\lambda_{\omega_n}' = \frac{1}{\lambda_l} \sqrt{\frac{\lambda_E}{\lambda_\rho}} \tag{11}$$

过渡模型与缩比空腔仅壁厚不同,由式(10)可得到两个模型固有频率相似关系为

$$\lambda_{\omega_n}'' = \frac{h_s}{\lambda_l h} = \frac{\lambda_h}{\lambda_l} \tag{12}$$

综合式(11)和式(12)可知,对于满足 $\lambda_L = \lambda_W = \lambda_D \neq \lambda_h$ 的不完全几何相似模型,在满足 $\lambda_\mu = 1$ 和边界条件相同的前提下,缩比模型与真实空腔固有频率之间的关系为

$$\lambda_{\omega_n} = \lambda_{\omega_n}' \cdot \lambda_{\omega_n}'' = \frac{\lambda_h}{\lambda_l^2} \sqrt{\frac{\lambda_E}{\lambda_\rho}} \tag{13}$$

2 频率响应相似关系

2.1 完全几何相似

弹性体的强迫振动与固有振动相比,差别在于有可随时间变化的外载荷的作用^[10]。分析不难发现,与结构动力特性相关的物理量主要包括 ρ 、 E 、 μ 、 l 、 P 、 ω_n 、 u 、 $\dot{u}$ 、 $\ddot{u}$ 、 H_u 、 $H_{\dot{u}}$ 、 $H_{\ddot{u}}$ 。其中 P 为分布于结构表面的外载荷; u 、 $\dot{u}$ 和 $\ddot{u}$ 分别为结构运动位移、速度和加速度; H_u 、 $H_{\dot{u}}$ 和 $H_{\ddot{u}}$ 分别为结构运动位移、速度和加速度频率响应函数。

根据量纲分析理论可推导出如下无量纲数:

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{H_u P}{u} & \pi_2 = \frac{H_{\dot{u}} P}{\dot{u}} & \pi_3 = \frac{H_{\ddot{u}} P}{\ddot{u}} \\ \pi_4 = \frac{u}{l} & \pi_5 = \frac{\dot{u}}{\omega_n l} & \pi_6 = \frac{\ddot{u}}{\omega_n^2 l} \\ \pi_7 = \frac{P}{E} & \pi_8 = \frac{E}{\rho l^2 \omega_n^2} & \pi_9 = \mu \end{cases} \quad (14)$$

分析不难发现,在满足 $\lambda_\mu = 1$ 和边界条件相同的前提下,对于完全几何相似模型,若保证缩比模型与真实结构载荷的作用方式相同,则其位移、速度及加速度频率响应函数满足如下关系:

$$\begin{cases} \frac{H_{us}(\lambda_{\omega_n} \omega)}{H_u(\omega)} = \frac{\lambda_l}{\lambda_E} \\ \frac{H_{\dot{u}s}(\lambda_{\omega_n} \omega)}{H_{\dot{u}}(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\rho \lambda_E}} \\ \frac{H_{\ddot{u}s}(\lambda_{\omega_n} \omega)}{H_{\ddot{u}}(\omega)} = \frac{1}{\lambda_\rho \lambda_l} \end{cases} \quad (15)$$

2.2 不完全几何相似

首先分析变厚度薄壁空腔的频率响应相似关系。根据振型叠加法,系统位移、速度及加速度的振型展开式为^[17]

$$\begin{cases} u(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t) \\ \dot{u}(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n \dot{q}_n(t) \\ \ddot{u}(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n \ddot{q}_n(t) \end{cases} \quad (16)$$

其中 ϕ_n 为第 n 阶模态振型; $q_n(t)$ 为模态空间坐标; N 为系统自由度数。

将式(16)代入式(3),根据振型正交性可对式(3)进行解耦并转化成模态空间下的单自由度系统

$$M_n \ddot{q}(t) + C_n \dot{q}(t) + K_n q(t) = p_n(t) \quad (17)$$

其中 $M_n = \phi_n^T M \phi_n$; $C_n = \phi_n^T C \phi_n$; $K_n = \phi_n^T K \phi_n$; $p_n(t) =$

$\phi_n^T p(t)$ 。

结构阻尼影响因素复杂(如材料内部摩擦、塑性效应、连接处相对滑动、试验环境等),动力学缩比模型设计过程中难以保证阻尼项相似,实际解决方案一般是根据真实结构和缩比模型的模态阻尼比关系,对试验数据进行修正^[13]。因此,为考虑阻尼影响,在此引入模态阻尼比 $\xi_n = C_n / 2\sqrt{M_n K_n}$,则式(17)可改写为

$$M_n \ddot{q}(t) + 2\xi_n \sqrt{M_n K_n} \dot{q}(t) + K_n q(t) = p_n(t) \quad (18)$$

由式(8)不难求出该单自由度系统位移、速度和加速度传递函数,即频率响应函数为

$$\begin{cases} Hq_n(\omega) = \frac{1}{-M_n \omega^2 + 2i\xi_n \omega \sqrt{M_n K_n} + K_n} \\ H\dot{q}_n(\omega) = \frac{i\omega}{-M_n \omega^2 + 2i\xi_n \omega \sqrt{M_n K_n} + K_n} \\ H\ddot{q}_n(\omega) = \frac{-\omega^2}{-M_n \omega^2 + 2i\xi_n \omega \sqrt{M_n K_n} + K_n} \end{cases} \quad (19)$$

则该单自由度系统响应和激励间的关系为

$$\begin{cases} Q_n(\omega) = Hq_n(\omega) \cdot P_n(\omega) \\ \dot{Q}_n(\omega) = H\dot{q}_n(\omega) \cdot P_n(\omega) \\ \ddot{Q}_n(\omega) = H\ddot{q}_n(\omega) \cdot P_n(\omega) \end{cases} \quad (20)$$

其中 $Q_n(\omega)$ 和 $P_n(\omega)$ 表示响应和激励的频谱。

将式(20)代入式(16),可将模态空间下的结构动力响应转到物理空间下,得到物理坐标下的结构动力响应和激励间的关系为

$$\begin{cases} U(\omega) = \sum_{n=1}^N \phi_n Hq_n(\omega) \phi_n^T \cdot P(\omega) \\ \dot{U}(\omega) = \sum_{n=1}^N \phi_n H\dot{q}_n(\omega) \phi_n^T \cdot P(\omega) \\ \ddot{U}(\omega) = \sum_{n=1}^N \phi_n H\ddot{q}_n(\omega) \phi_n^T \cdot P(\omega) \end{cases} \quad (21)$$

则物理坐标下多自由度系统的位移、速度及加速度频率响应矩阵为

$$\begin{cases} H_u(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n \phi_n^T}{-M_n \omega^2 + 2i\xi_n \omega \sqrt{M_n K_n} + K_n} \\ H_{\dot{u}}(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{i\omega \phi_n \phi_n^T}{-M_n \omega^2 + 2i\xi_n \omega \sqrt{M_n K_n} + K_n} \\ H_{\ddot{u}}(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{-\omega^2 \phi_n \phi_n^T}{-M_n \omega^2 + 2i\xi_n \omega \sqrt{M_n K_n} + K_n} \end{cases} \quad (22)$$

由式(6)、式(7)和式(17)不难推出缩比模型和真实结构模态质量矩阵和刚度矩阵满足

$$\begin{cases} M_{ns} = \boldsymbol{\phi}_{ns}^T \mathbf{M}_s \boldsymbol{\phi}_{ns} = \lambda_h M_n \\ K_{ns} = \boldsymbol{\phi}_{ns}^T \mathbf{K}_s \boldsymbol{\phi}_{ns} = \lambda_h^3 K_n \end{cases} \quad (23)$$

假定缩比模型与真实结构各阶模态阻尼比对应相等,则联立式(10)、式(22)和式(23)有

$$\frac{\mathbf{H}_{us}(\lambda_{\omega_n} \omega)}{\mathbf{H}_u(\omega)} = \frac{\sum_{n=1}^N \left\{ \boldsymbol{\phi}_{ns} \boldsymbol{\phi}_{ns}^T / [-M_{ns} (\lambda_{\omega_n} \omega)^2] + 2i\xi_n \lambda_{\omega_n} \omega \sqrt{M_{ns} K_{ns}} + K_{ns} \right\}}{\sum_{n=1}^N \left[\boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\phi}_n^T / (-M_n \omega^2) + 2i\xi_n \omega \sqrt{M_n K_n} + K_n \right]} = \frac{1}{\lambda_h^3} \quad (24)$$

同理可推导出

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{H}_{us}(\lambda_{\omega_n} \omega)}{\mathbf{H}_u(\omega)} = \frac{1}{\lambda_h^2} \\ \frac{\mathbf{H}_{us}(\lambda_{\omega_n} \omega)}{\mathbf{H}_u(\omega)} = \frac{1}{\lambda_h} \end{cases} \quad (25)$$

与推导不完全几何相似模型固有频率关系的分析过程一样(见图 1),将完全几何相似模型作为过渡模型,由式(15)不难得到过渡模型与真实薄壁空腔的频响关系为

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{H}_{us}(\lambda_{\omega_n'} \omega)}{\mathbf{H}_u(\omega)} = \frac{\lambda_l}{\lambda_E} \\ \frac{\mathbf{H}_{us}(\lambda_{\omega_n'} \omega)}{\mathbf{H}_u(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\rho \lambda_E}} \\ \frac{\mathbf{H}_{us}(\lambda_{\omega_n'} \omega)}{\mathbf{H}_u(\omega)} = \frac{1}{\lambda_\rho \lambda_l} \end{cases} \quad (26)$$

由式(24)和式(25)可得到缩比空腔与过渡模型的频响关系为

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{H}_{us}(\lambda_{\omega_n''} \omega)}{\mathbf{H}_u(\omega)} = \frac{\lambda_l^3}{\lambda_h^3} \\ \frac{\mathbf{H}_{us}(\lambda_{\omega_n''} \omega)}{\mathbf{H}_u(\omega)} = \frac{\lambda_l^2}{\lambda_h^2} \\ \frac{\mathbf{H}_{us}(\lambda_{\omega_n''} \omega)}{\mathbf{H}_u(\omega)} = \frac{\lambda_l}{\lambda_h} \end{cases} \quad (27)$$

综合式(26)和式(27)可知,对于满足 $\lambda_L = \lambda_W = \lambda_D \neq \lambda_h$ 的不完全几何相似模型,在满足 $\lambda_\mu = 1$ 和边界条件相同的前提下,缩比模型与真实空腔频响之间的关系为

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{H}_{us}(\lambda_{\omega_n} \omega)}{\mathbf{H}_u(\omega)} = \frac{\mathbf{H}_{us}(\lambda_{\omega_n'} \omega)}{\mathbf{H}_u(\omega)} \cdot \frac{\mathbf{H}_{us}(\lambda_{\omega_n''} \omega)}{\mathbf{H}_u(\omega)} = \frac{\lambda_l^4}{\lambda_h^3 \lambda_E} \\ \frac{\mathbf{H}_{us}(\lambda_{\omega_n} \omega)}{\mathbf{H}_u(\omega)} = \frac{\lambda_l^2}{\lambda_h^2 \sqrt{\lambda_\rho \lambda_E}} \\ \frac{\mathbf{H}_{us}(\lambda_{\omega_n} \omega)}{\mathbf{H}_u(\omega)} = \frac{1}{\lambda_\rho \lambda_h} \end{cases} \quad (28)$$

3 随机振动响应相似关系

在高速来流条件下,空腔内高强的噪声载荷会诱发薄壁结构产生剧烈的随机振动,为开展缩比弹性空腔声振耦合特性试验研究,需要进一步

确定在随机载荷作用下,缩比模型与真实结构振动响应的相似关系。

根据 Duhamel's 积分,对于多自由度系统,其位移的时域响应可表示为^[17]

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{p}(t-\theta) \mathbf{h}_u(\theta) d\theta \quad (29)$$

其中 $\mathbf{h}_u(\theta)$ 为结构单位脉冲位移响应函数。

位移响应的自相关函数为^[18-19]

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_u(\tau) &= E[\mathbf{u}(t) \mathbf{u}(t+\tau)] = \\ &= \int_0^t \int_0^t \mathbf{R}_p(\tau+\theta_1-\theta_2) \mathbf{h}_u(\theta_1) \mathbf{h}_u(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned} \quad (30)$$

式(30)两端作 Fourier 变换得到多自由度系统位移响应的功率谱密度矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_u(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_u(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_0^t \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_p(\tau+\theta_1-\theta_2) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] \cdot \\ &\quad \mathbf{h}_u(\theta_1) \mathbf{h}_u(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \mathbf{H}_u^*(\omega) \mathbf{S}_p(\omega) \mathbf{H}_u(\omega)^T \end{aligned} \quad (31)$$

其中 $\mathbf{H}_u(\omega)$ 为多自由度系统位移频响矩阵, $\mathbf{S}_p(\omega)$ 为输入载荷功率谱密度矩阵,上标“*”表示共轭矩阵。

结合式(28),若缩比模型与真实结构的输入载荷谱满足 $\mathbf{S}_{ps}(\lambda_{\omega_n} \omega) / \mathbf{S}_p(\omega) = C$, 且 C 为常数,则两个模型的位移响应功率谱满足

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{S}_{us}(\lambda_{\omega_n} \omega)}{\mathbf{S}_u(\omega)} &= \\ \frac{\mathbf{H}_{us}^*(\lambda_{\omega_n} \omega) \mathbf{S}_{ps}(\lambda_{\omega_n} \omega) \mathbf{H}_{us}(\lambda_{\omega_n} \omega)^T}{\mathbf{H}_u^*(\omega) \mathbf{S}_p(\omega) \mathbf{H}_u(\omega)^T} &= \\ C \frac{\lambda_l^8}{\lambda_h^6 \lambda_E^2} \end{aligned} \quad (32)$$

同理可求出缩比模型与真实结构的速度及加速度响应功率谱满足

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{S}_{us}(\lambda_{\omega_n} \omega)}{\mathbf{S}_u(\omega)} = C \frac{\lambda_l^4}{\lambda_h^4 \lambda_\rho \lambda_E} \\ \frac{\mathbf{S}_{us}(\lambda_{\omega_n} \omega)}{\mathbf{S}_u(\omega)} = C \frac{1}{\lambda_\rho^2 \lambda_h^2} \end{cases} \quad (33)$$

4 数值验证

数值仿真手段较为灵活,可人为设定材料任

意属性、模型几何参数及模态阻尼比等,从而全面模拟每个物理参数变化对结构动力特性的影响,因此,以四边固支薄壁空腔为研究对象,通过数值仿真验证上文建立的相似关系在实际工程应用中的可靠性。

4.1 固有频率相似关系验证

实际典型薄壁空腔材料多选用铝合金,为考虑材料对结构动力特性的影响,这里假定缩比模型材料选用结构钢,模型结构参数如表 2 所示。

表 3 给出了 2 个空腔模型前三阶固有频率的计算结果,根据缩比空腔的结果,利用固有频率相似关系对全尺寸空腔固有频率进行预估,并与实际计算结果进行对比。由表中数据可以发现,预估值与计算结果误差很小,说明建立的相似关系是可靠的。经过分析,产生误差的原因主要是由于相似关系成立的前提是两个模型泊松比相等,而这里的缩比空腔与全尺寸空腔材料泊松比存在偏差。

表 2 数值仿真模型结构参数

Table 2 Structural parameters for numerical simulation models		
结构参数	全尺寸空腔	缩比空腔
L/mm	540	270
W/mm	360	180
D/mm	90	45
h/mm	1.6	1
$E/10^{10}\text{ Pa}$	6.9	19.8
$\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	2800	7850
μ	0.33	0.266
ξ	0.05	0.05

表 3 模型前三阶固有频率数值计算结果及预估值

Table 3 Numerical and estimated results of the first three order natural frequencies of models				
参数	固有频率/Hz			
	1 阶	2 阶	3 阶	
计算值	全尺寸空腔	68.31	109.06	168.98
	缩比空腔	169.37	270.23	418.86
预测值		66.96	106.84	165.6
相对误差/%		1.98	2.04	2.00

4.2 频响相似关系验证

对于实际空腔声振耦合问题,噪声载荷分布于空腔壁面,因此在数值仿真时,假定单位载荷均布于空腔内表面,且缩比模型与全尺寸空腔的网格划分方式相同,选取空腔底板中心点作为响应点,如图 2 所示。空腔结构参数见表 2,这里假定两个模型的各阶模态阻尼比相同,均为 5%,空腔底板中心点的频率响应数值仿真结果如图 3 所示。

根据缩比模型的频响结果,利用建立的频率

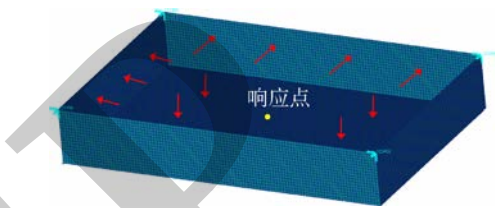
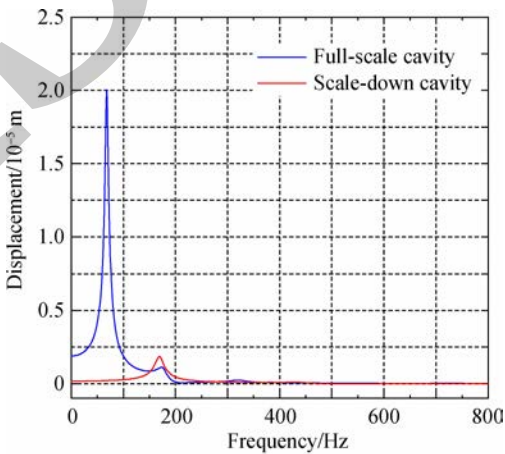
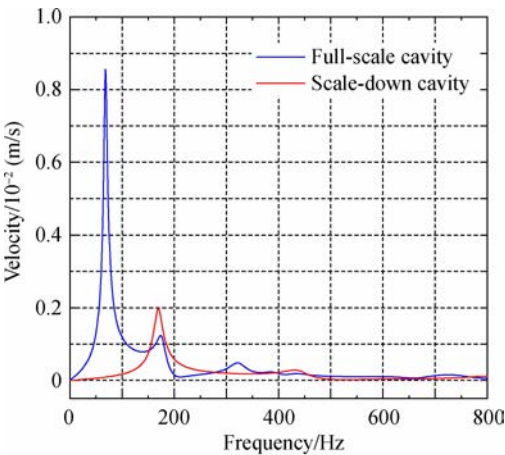


图 2 数值模型网格划分及响应点位置

Fig. 2 Mesh generation of numerical model and response point location



(a) 位移频率响应曲线



(b) 速度频率响应曲线

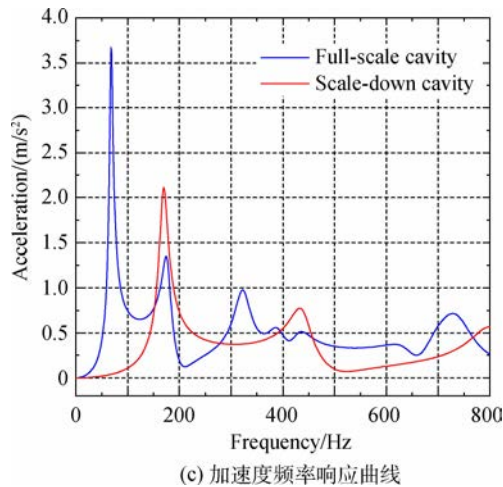


图 3 全尺寸空腔和缩比模型底板中心点频率响应结果
Fig. 3 Frequency response of full-scale cavity and scale-down model at the central point of bottom wall

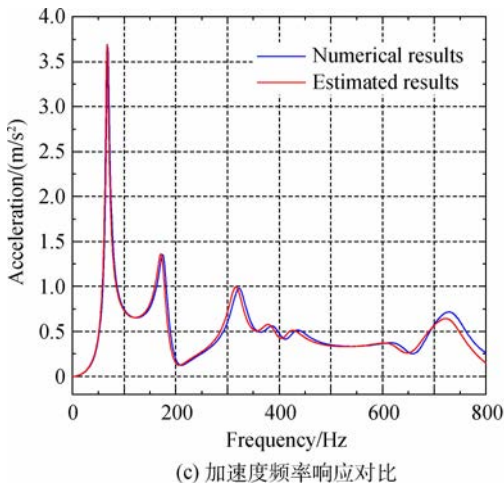


图 4 全尺寸空腔底板中心点频响预测与数值计算结果
Fig. 4 Frequency response of full-scale cavity at central point of bottom wall between estimated and numerical results

响应相似关系对全尺寸空腔频响进行预估,并与实际数值仿真结果进行对比,如图 4 所示。由图中对比结果可以发现,预估结果与数值仿真结果吻合较好,说明推导的相似关系真实可靠。

4.3 随机振动响应相似关系验证

为验证薄壁结构随机振动响应的相似关系的可靠性,这里假定空腔内表面均布加载一梯形载荷谱(如图 5 所示),且缩比模型与全尺寸空腔的载荷谱满足 $S_{ps}(\lambda_{\omega_n}\omega)/S_p(\omega)=2.5$ 。

图 6 为全尺寸空腔和缩比模型底板中心点的加速度响应功率谱密度(PSD),根据缩比空腔的响应结果,利用随机振动响应相似关系对全尺寸空腔加速度响应谱进行预估,并与实际计算结果进行对比,如图 7 所示为全尺寸空腔底板中心点加速度响应谱预测值与计算结果对比图。由图中对比结果可以发现,预估结果与计算结果吻合较好,进一步分析发现,位移和速度响应的预估结果

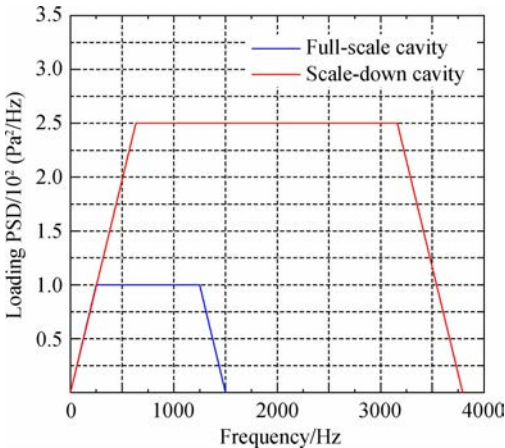
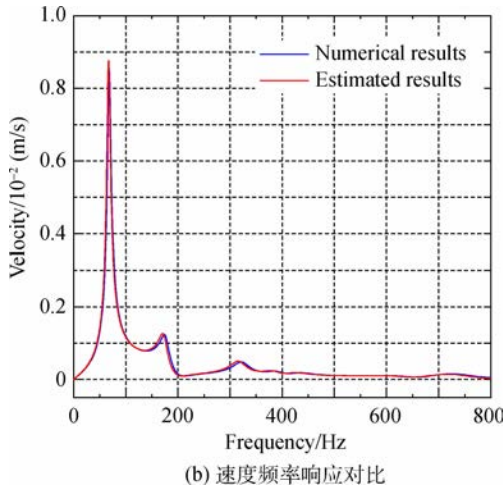
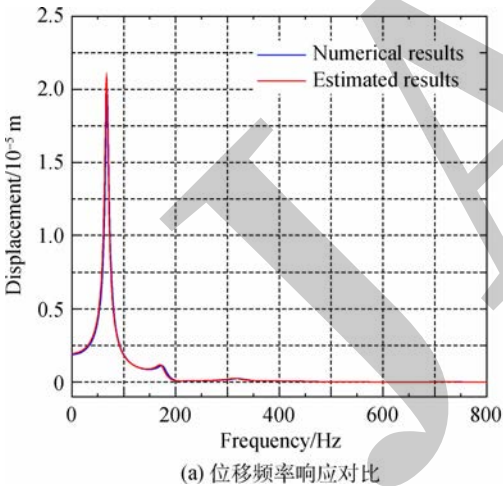


图 5 全尺寸空腔和缩比模型载荷功率谱密度
Fig. 5 Loading PSD of full-scale cavity and scale-down model

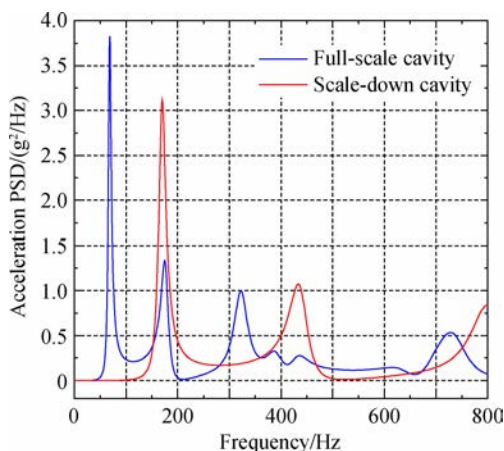


图6 全尺寸空腔和缩比模型底板中心点
加速度功率谱密度

Fig. 6 Acceleration PSD of full-scale cavity and
scale-down model

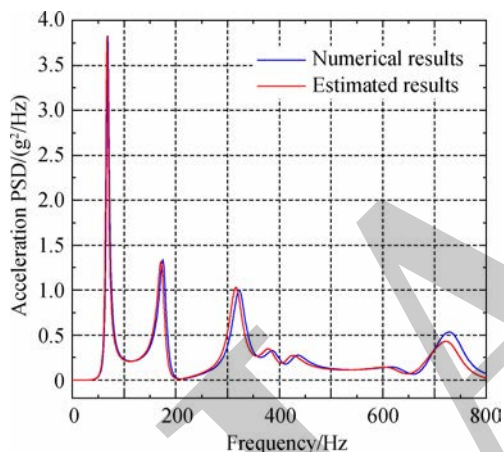


图7 全尺寸空腔底板中心点加速度功率谱密度预测
与数值计算值

Fig. 7 Acceleration PSD of full-scale cavity at central
point of bottom wall between estimated and
numerical results

与实际计算结果均吻合较好,从而说明建立的随机振动响应相似关系是真实可靠的。

5 结 论

1) 基于相似理论,对薄壁结构固有特性及动力学特性进行分析,利用量纲分析法建立了完全几何相似模型的固有频率及频响相似关系。

2) 基于有限元理论,建立了变厚度薄壁结构动力学相似关系,通过引入完全几何相似模型作为过渡模型,建立了不完全几何相似模型固有频率和频响的相似关系。

3) 基于随机振动理论,推导出多自由度系统振动响应谱矩阵,结合固有频率及频响相似关系,

建立了结构随机振动响应的相似关系。

4) 利用数值仿真手段对建立的相似关系进行验证,阐明了相似关系在实际工程应用中的可靠性。

本文建立的相似关系具有明确的工程应用价值,可用于指导薄壁结构缩比模型的试验方案设计,其分析方法可进一步推广应用到复杂外形薄壁结构。相似关系成立的前提是模型为薄壁结构,但没有确定壁厚的相似区间,且推导过程中未考虑阻尼和泊松比对结构动力响应的影响,相关问题将是下一步的研究重点。

参考文献:

- [1] 杨党国. 内埋武器舱气动声学特性与噪声抑制研究[D]. 绵阳:中国空气动力研究与发展中心,2010.
YANG Dangguo. Studies on aeroacoustic characteristics and noise suppressions for internal weapon bays[D]. Mi-nyang, China Aerodynamic Research and Development Center,2010. (in Chinese)
- [2] SHIEH C M, MORRIS P J. Comparison of two-and-three-dimensional turbulent cavity flows[R]. AIAA-2001-0511, 2001.
- [3] 王显圣,杨党国,刘俊,等. 弹性空腔流致噪声/振动特性实验研究[J]. 航空学报,2017,38(7):177-186.
WANG Xiansheng, YANG Dangguo, LIU Jun, et al. Ex-perimental study of interactions between aeroacoustic noise and structural vibrations in an elastic cavity flow[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica,2017,38(7):177-186. (in Chinese)
- [4] MORTON J. Scaling of impact loaded carbon fiber com-posites[J]. AIAA Journal,1988,26(8):989-994.
- [5] QIAN Y, SWANSON S R, NUISMER R J, et al. An ex-perimental study of scaling rules for impact damage in fiber composites[J]. Journal of Composite Materials, 1990, 24 (5):559-570.
- [6] FROSTIG Y, SIMITSES G J. Structural similitude and scaling laws for sandwich beams[R]. AIAA-2001-1280, 2001.
- [7] REZAEPAZHAND J, SIMITSES G J. Design of scaled down models for stability and vibration studies[R]. AIAA 94-1572,1994.
- [8] REZAEPAZHAND J, SIMITSES G J. Design of scaled down models for predicting shell vibration response[R]. AIAA 95-1325,1995.
- [9] FRIEDMANN P P. Aeroelastic scaling for rotary-wing air-craft with applications[J]. Journal of Fluids and Struc-tures, 2004,19(5):635-650.
- [10] 陈陆,陈国平. 相似理论和模型试验的结构动响应分析运 用[J]. 振动、测试与诊断,2014,34(6):995-1000.
CHEN Zhe, CHEN Guoping. Structural dynamic response analysis and application of similarity theory and modeling

experiments[J]. Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis, 2014, 34(6):995-1000. (in Chinese)

[11] 罗忠,朱云鹏,韩清凯,等.薄板结构畸变模型的动力学相似设计及几何区间确定[J].航空发动机,2015,41(3):18-23.

LUO Zhong, ZHU Yunpeng, HAN Qingkai, et al. Determination method of dynamic similitude and applicable structure size interval of distorted models for elastic thin plates[J]. Aeroengine, 2015, 41(3):18-23. (in Chinese)

[12] 罗忠,郭健,朱云鹏,等.叶片动力学相似试验模型设计及其固有特性预测修正[J].航空动力学报,2015,30(7):1611-1617.

LUO Zhong, GUO Jian, ZHU Yunpeng, et al. Design method and revising strategy of inherent characteristics for dynamic similarity test model of blade[J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(7):1611-1617. (in Chinese)

[13] 李斌,张玉杰,杨智春.阻尼不相似动力学模型的时域修正方法[J].航空学报,2012,33(3):463-469.

LI Bin, ZHANG Yujie, YANG Zhichun. Updating method of the time history response for dynamic similitude models with dissimilar damping ratios[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2012, 33(3):463-469. (in Chinese)

[14] 孙宁.薄壁圆柱壳构件的相似动力学特性研究[D].沈阳:东北大学,2014.

SUN Ning. Research of similar dynamic characteristics of thin walled cylindrical shell[D]. Shenyang: Northeastern University, 2014. (in Chinese)

[15] 谈庆明.量纲分析[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2005.

[16] 朱伯芳.有限单元法原理与应用[M].北京:中国水利水电出版社,2009.

[17] 李东旭.高等结构动力学[M].北京:科学出版社,2010.

[18] 农绍宁,田光明,赵怀耘.多维激励下结构随机振动响应分析[J].装备环境工程,2013,10(2):124-128.

NONG Shaoning, TIAN Guangming, ZHAO Huaiyun. Random vibration response analysis of structures under multi-dimensional excitation[J]. Equipment Environmental Engineering, 2013, 10(2):124-128. (in Chinese)

[19] 曾昭扬,徐培忠,李未显.水流脉动压力下结构的随机振动分析[J].水利学报,1983,1(3):15-26.

ZENG Zhaoyang, XU Peizhong, LI Weixian. Random vibration analysis of structures under flow fluctuating pressure[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1983, 1(3):15-26. (in Chinese)

(编辑:王碧琚)